

專題題目

摘要

圓圈圖遊戲是一種休閒益智類的遊戲，這遊戲大家應該不陌生，小時候一定曾和同學玩過，而此遊戲玩法是使對方劃到最後一顆，其遊戲規則由雙方訂定，每局要決定需劃掉1~k顆圓圈，可自由選擇要劃掉的位置，並且劃掉最後一顆的人為輸家或贏家。

我們在遊戲過程中開始思考，該如何正確地執行每一步，才能使自己獲得勝利，同時不讓對手有機可乘，而我們也從中找尋到其數學的規律，能讓己方獲得完全的勝利，於是我們展開了後續的研究，進一步的了解關於先後的順序及特定的顆數才能取得勝利。

研究動機

在開始研究前，老師告訴我們關於滅鼠板的遊戲在年輕人之間十分流行，刚开始認為這只是個簡單的小遊戲，且遊戲的輸贏只是靠運氣，但實際研究後，會發現因為這是關於數學的遊戲，因此可以找尋一些規律，而我們會觀察到先後順序以及特定的數量，皆會影響著勝負。

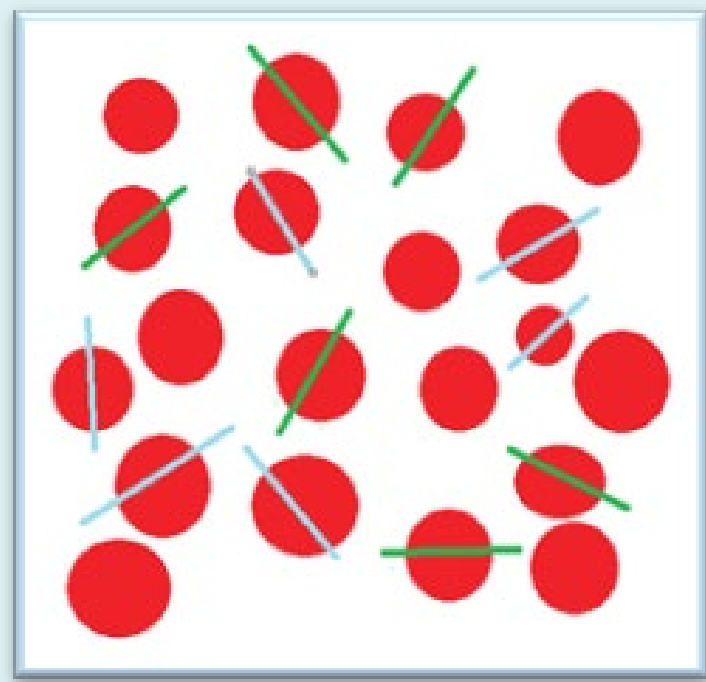
經過幾次的遊玩後，察覺到此遊戲並非只靠運氣，而且也不是我們想像中的這麼簡單，於是我們決定研究此遊戲是否有必贏的方式，又或者先手與後手獲勝方法的差異。

問題描述

先以基本遊戲作為想法，根據題型研究如何取得勝利的方法。

◆ 遊戲規則

1. 首先決定題目圓圈顆數。
2. 參與玩家共2位。
3. 可自由選擇劃掉，每人一次可劃掉1~k顆圓圈，並且劃掉最後一顆的人就輸/贏了。



Ex: 假設劃到第20顆圓圈的為贏家
(玩家: 甲、乙)
甲: 1 2 3 乙: 4
甲: 5 6 乙: 7 8
甲: 9 乙: 10 11 12
甲: 13 14 乙: 15 16
甲: 17 18 19 乙: 20 ⇨此時乙為贏家

研究方法

1. 訂出題型規則(包含一次能劃掉的顆數及劃掉最後一顆為輸家或者贏家)。
2. 從題目總顆數為一顆，接著不斷增加一顆，去開始探討每一次進行遊戲勝利一方的情況。
3. 經由多次嘗試，會發現其規律，將其公式化即可得出必勝的秘訣。

研究問題

一、 研究方向

以上述基礎遊戲延伸來進行探討，將圓圈由簡單的一堆分為多堆來增加遊玩的困難度，尋找如何取得勝利的策略。

二、 問題描述

倘若我們將數量分為A與B兩堆(A、B與C三堆)，玩家可從兩堆(三堆)中隨機選取某堆進行劃掉的動作，在基本指令不變的情況下，找尋是否亦有必勝的規律。

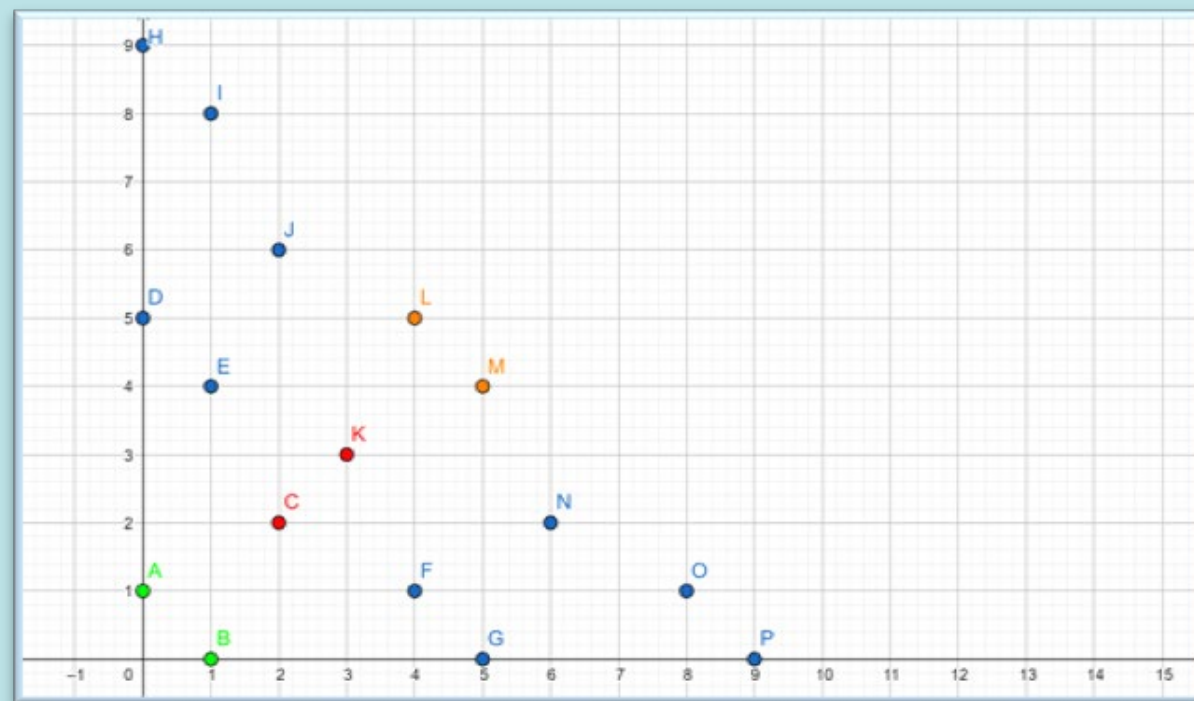
結果與討論

【題型一】將圓圈分為2堆，劃到最後為輸家。

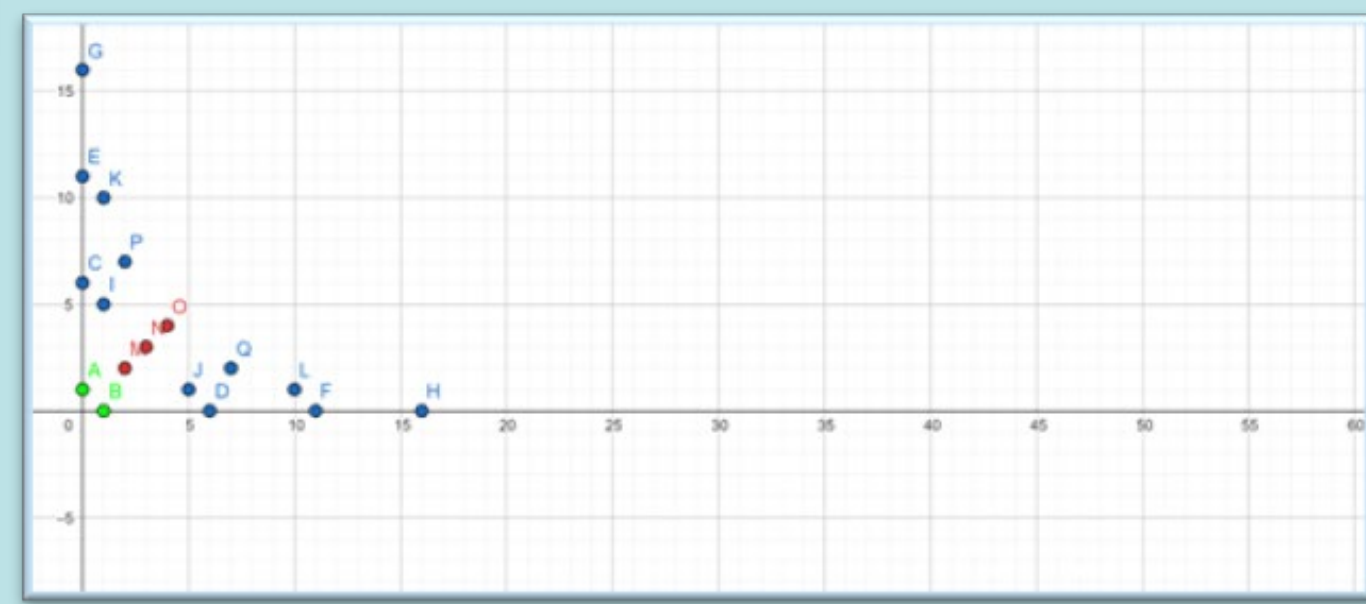
Ex1. 當一次只能劃{1, 2, 3}顆時，兩邊圓圈數量除4餘數分別為
” [0, 1]、[2, 2]、[3, 3]” ，則後者勝利，其餘方法為前者勝。

Ex2. 當一次只能劃{1, 2, 3, 4}顆時，兩邊圓圈數量除5餘數分別為
” [0, 1]、[2, 2]、[3, 3]、[4, 4]” ，則後者勝利，其餘方法為前者勝。

⇨當一次只能劃{1, 2, 3..., k}顆時，兩邊圓圈數量除k+1餘數分別為
” [0, 1]、[2, 2]、[3, 3]...[k, k]” ，則後者勝利，其餘方法為前者勝。



(題型一： Ex1) 當走到標記點時，必輸。



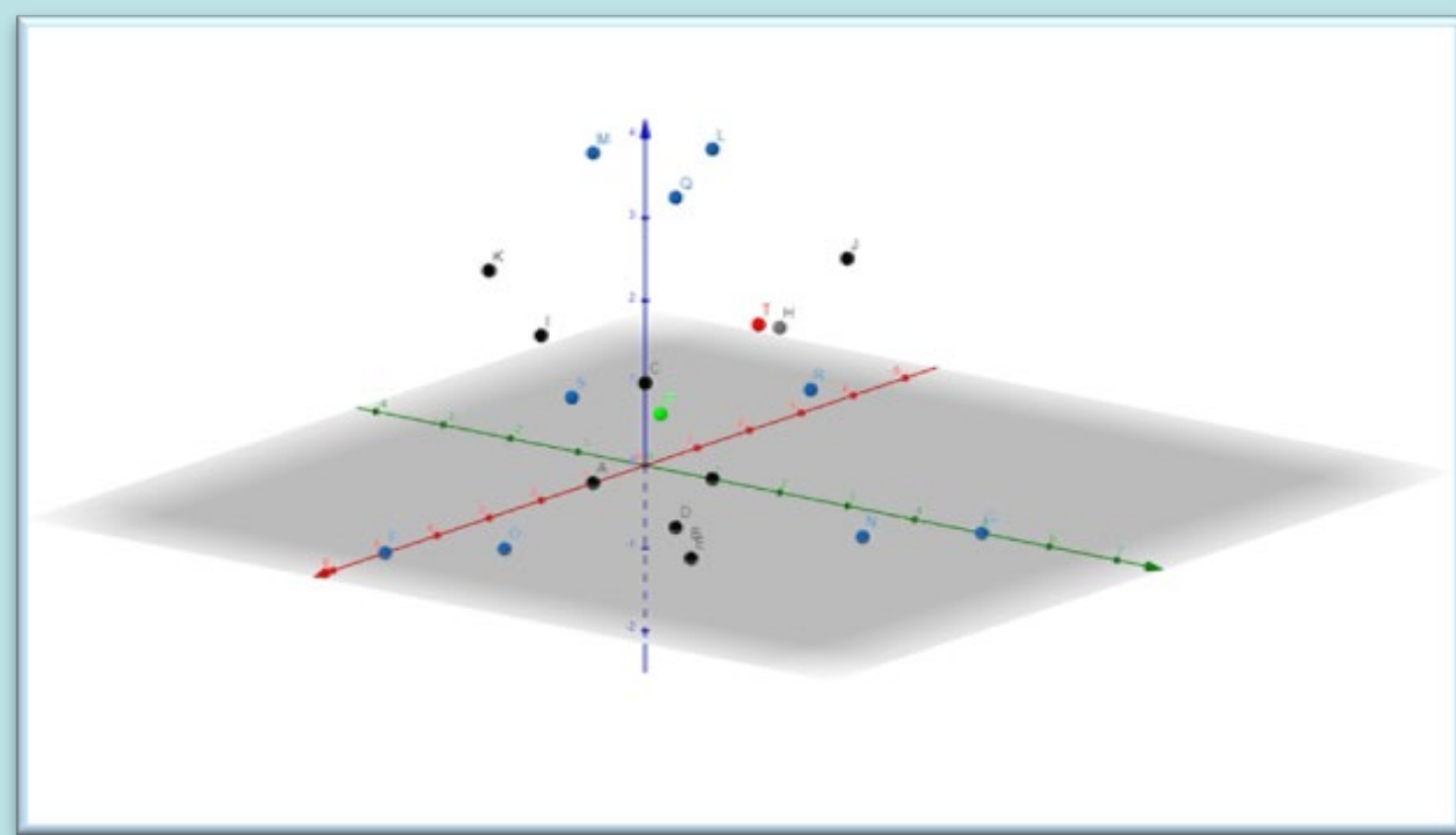
(題型一： Ex2) 當走到標記點時，必輸。

【題型二】將圓圈分為3堆，畫到最後為輸家。

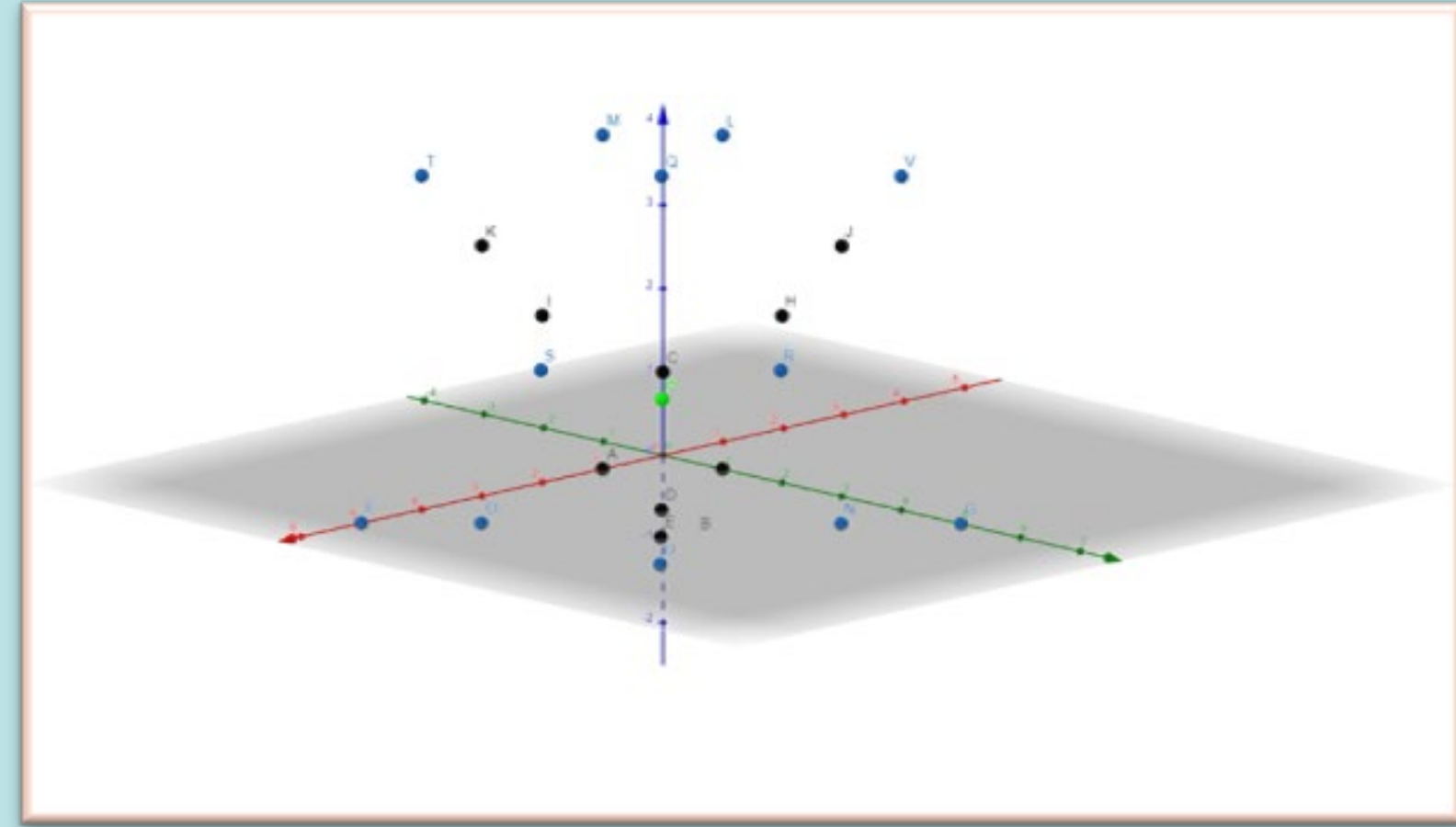
Ex1. 當一次只能劃{1, 2, 3}顆時，三堆圓圈數量除4餘數分別為
” [0, 0, 1] 、[1, 1, 1] 、[2, 2, 0] 、[3, 3, 0]” ，則後者勝利，其餘方法為前者勝。

Ex2. 當一次只能劃{1, 2, 3, 4}顆時，三堆圓圈數量除5餘數分別為
” [0, 0, 1] 、[1, 1, 1] 、[2, 2, 0] 、[3, 3, 0] 、[4, 4, 0]” ，則後者勝利，其餘方法為前者勝。

⇨當一次只能劃{1, 2, 3..., k}顆時，兩邊圓圈數量除k+1餘數分別為
” [0, 0, 1] 、[1, 1, 1] 、[2, 2, 0] 、[3, 3, 0]...[k, k, 0]” ，則後者勝利，其餘方法為前者勝。



(題型二： Ex1) 當走到標記點時，必輸。



(題型二： Ex1) 當走到標記點時，必輸。

結論

在還未研究必贏的策略之前，總是胡亂下筆，也不清楚自己是如何贏得對手，除了運氣以外，研究發現能夠從中觀察到遊戲的規律！因此如果想要必贏的話，就需要研究必勝的方法，照著結論一步一步下，也能讓自己更懂得思考。

經過這次的研究後，我們得知大多數的遊戲都不見得專靠運氣就能夠扭轉一切的，因此如果開場的先後手安排就決定了一切，對於會有這樣的可能性，使得我們更想將這可能性破解，並完成這項研究。

在蒐集資料時，發現原來有許多關於數學的紙筆遊戲，都可能找出必勝訣竅，未來若有著強烈的勝負心會更深入進行研究。

轉移矩陣應用－義守學生住宿變動情況

摘要

本次專題主題為轉移矩陣的應用，透過轉移矩陣，了解義守大學住宿的變動情況，調查各年級學生在一、二年級時的住宿狀況，藉由一樣的條件，探討各年級住宿變換是否會相同，結合wxMaxima和Python程式加以計算，以及探討數據的意義，計算二十年後，得到結果為全年級趨勢趨於租屋，由此可得到關於義守大學住宿的未來趨勢，但與義守大學條件完全相同的情況相當少，因此可以利用接下來所要探討的計算方法，將一些生活上的問題數據化，透過轉移矩陣的方式，預測未來的趨勢變化，進而判斷是否達到穩定，最後參考此數據去做改變。

問題描述

探討義守大學學生住宿變動情況，我們利用問卷去收集義守大學110學年度大一至106學年度的所有的住宿生，經過數據分析與統整後，觀察各年級在大一升大二時住宿的轉變情形，並將其數據應用在轉移矩陣上，用來預測未來的住宿變動率，去推測未來的住宿趨向及分析各年級的資料結果，也可以進一步預測學生宿舍所提供的數量是否充足。我們使用Google表單收集數據並統計資料，再將數據匯進Excel得知各年級比例，接著使用wxMaxima做轉移矩陣預測數據，最後使用Python來檢測數據是否正確，達到雙重驗證。

轉移矩陣（Transition）的定義

- 轉移矩陣：
對正整數 $n \geq 2$ ， n 方陣 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ，若滿足 (1.) $0 \leq a_{ij} \leq 1$ ， $1 \leq i \leq n$ ， $1 \leq j \leq n$ （即每一元都介 0，1 之(含)），(2.) $a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{nj} = 1$ ， $1 \leq j \leq n$ （即每一行各元的和皆為 1），則稱 A 是一個 n 階的轉移矩陣。
- 機率向量：
若 $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$ ，滿足 $0 \leq a_{i1} \leq 1$ ，其中 $i = 1, 2, \dots, n$ ，以及 $\sum_{i=1}^n a_{i1} = 1$ ，我們稱 X 為「機率向量」。

馬可夫定理：

A 是一個 n 階轉移矩陣， X_0 為 $n \times 1$ 的機率向量，當 k 逐漸增大時， $X_k = A^k X_0$ 會逐漸趨近唯一的 $n \times 1$ 階矩陣 X ，而且這個矩陣 X 滿足 $AX = X$ ，以及 X 中各元的和為 1（即 X 也是機率向量），則稱機率矩陣 X 為「穩定狀態」。

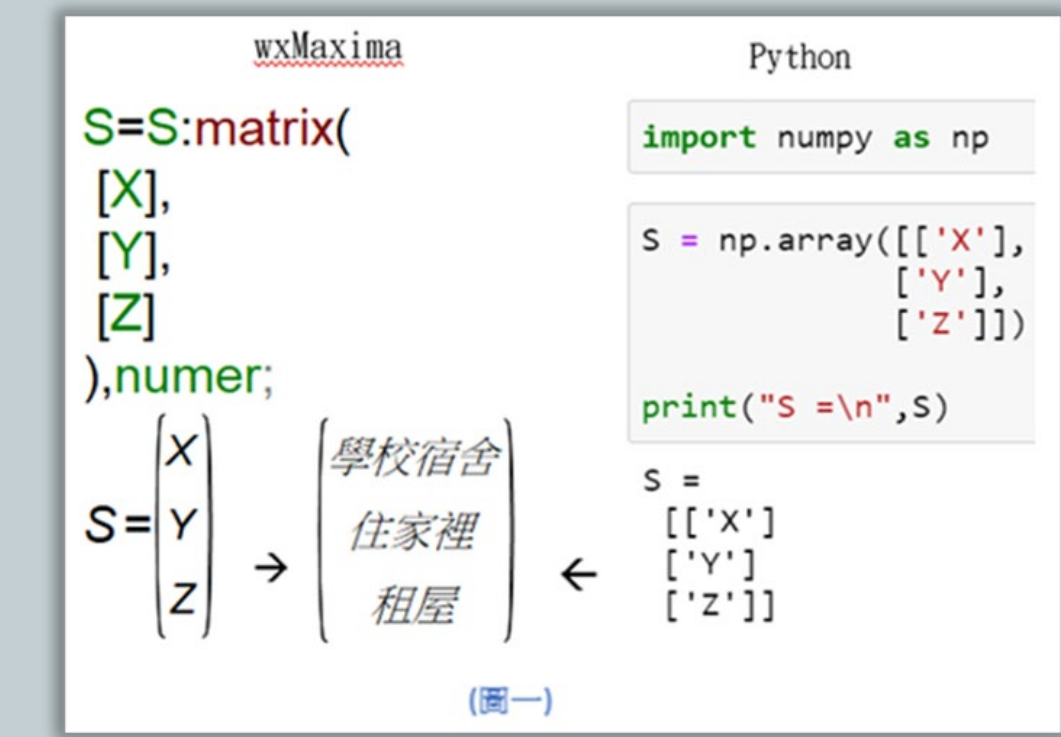
做法

程式解說

我們將統整好的資料運用轉移矩陣的性質以wxMaxima和Python兩種程式列出公式加以計算

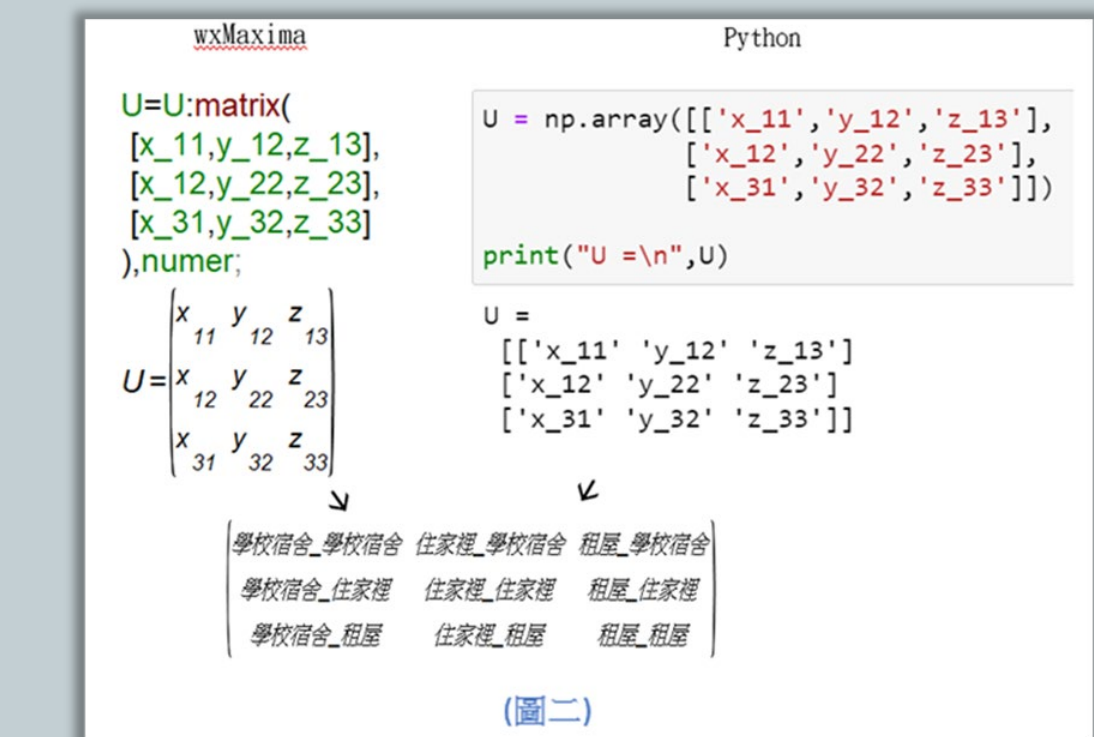
第一步

將資料中各個年級原本在一年級時所住宿的情況比例轉為一個矩陣(圖一)（令 S 為一年級原矩陣， X 為學校宿舍、 Y 為住家裡、 Z 為租屋）。



第二步

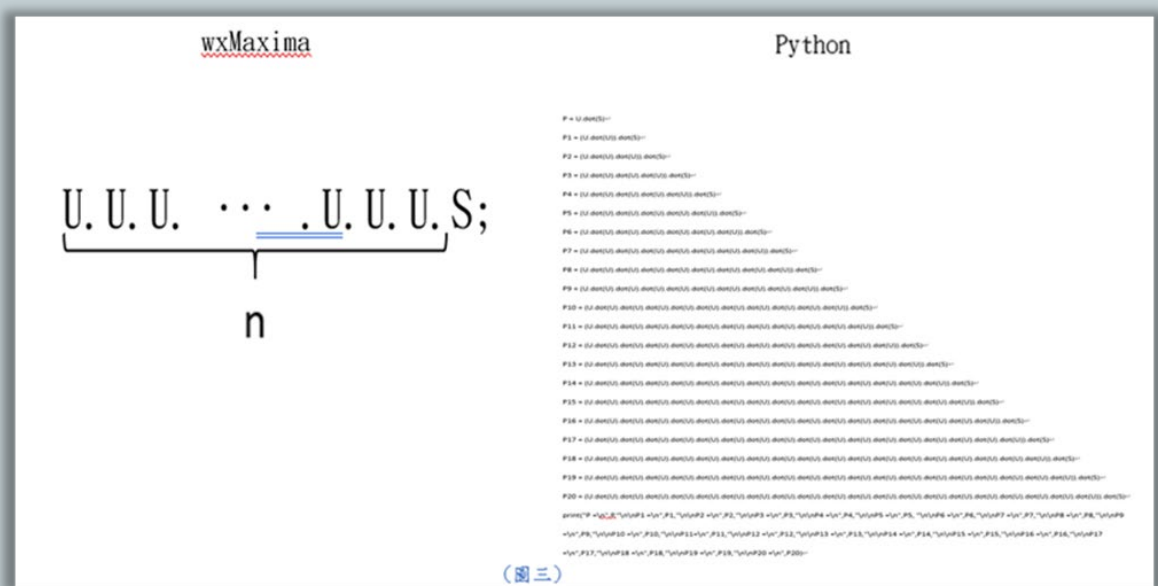
將各個年級在升二年級時改變住宿的情況比例轉為矩陣(圖二)（令 U 為二年級改變矩陣，第一行 x 為學校宿舍變換比例、第二行 y 為住家裡變換比例、第三行 z 為租屋變換比例）。



第三步

（方法一）(圖三)

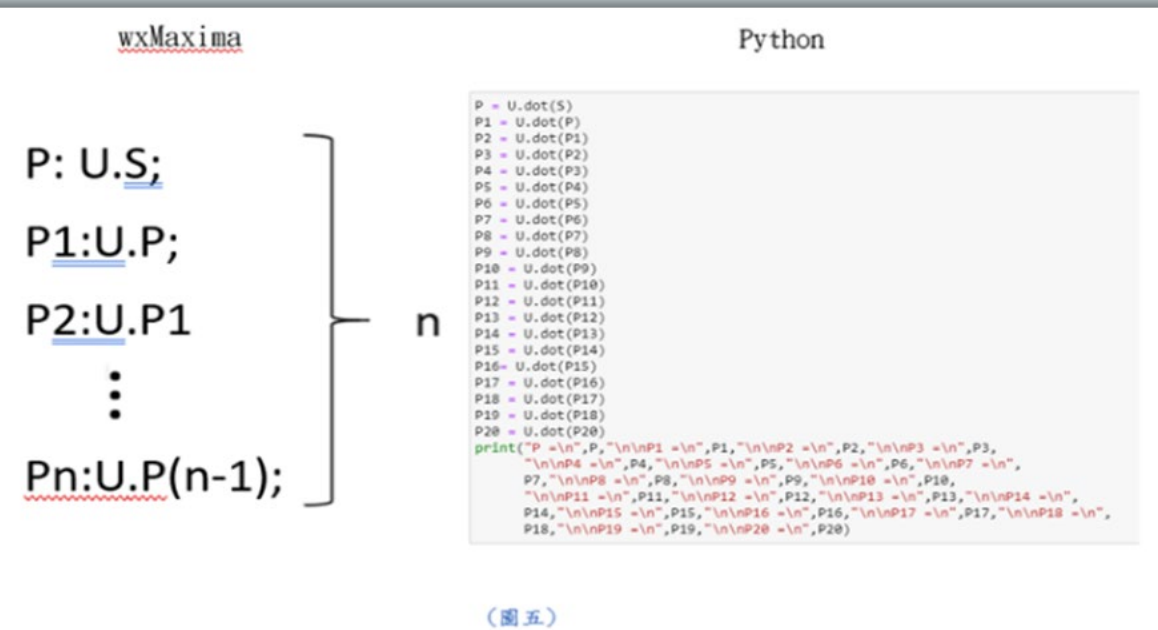
全列出試驗 n 年 ($n = 1, 2, 3, \dots$)



說明：在wxMaxima下標點指的是矩陣和矩陣之間做內積與Python當中的 `.dot()` 意思相同。

（方法三）(圖五)

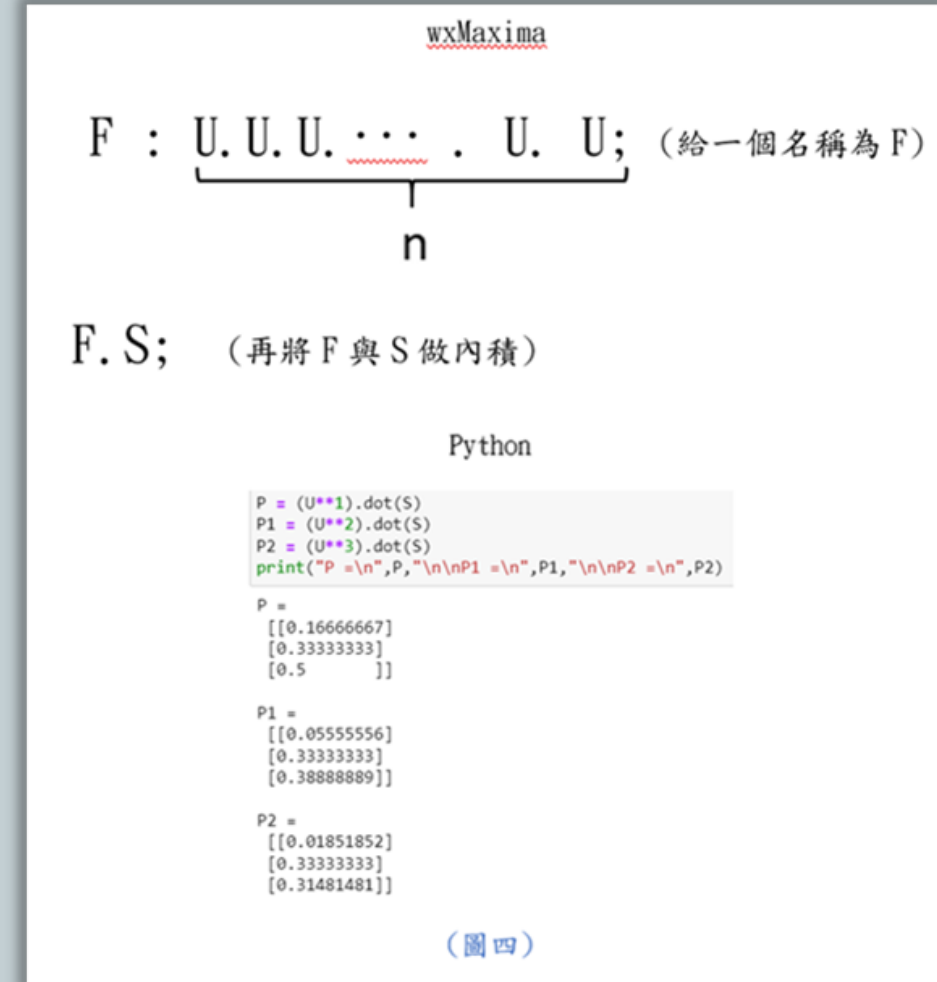
將方法一每一個都設一個名稱(令 P_n)簡化wxMaxima試驗 n 年 ($n = 1, 2, 3, \dots$) Python試驗20年(如果需更多可依此類推)



說明：wxMaxima與Python程式中把每一個計算過程取一個名稱，可在整體感官上看起來更加清晰明瞭。

（方法二）(圖四)

利用 U, U 再 S 試驗 n 年 ($n = 1, 2, 3, \dots$)



說明：在wxMaxima是可行的，但在Python當中則表示方式因 U 的 n 次方式指的是單純的矩陣乘以矩陣並不是互相做內積所以此方法在Python當中是行不通的。

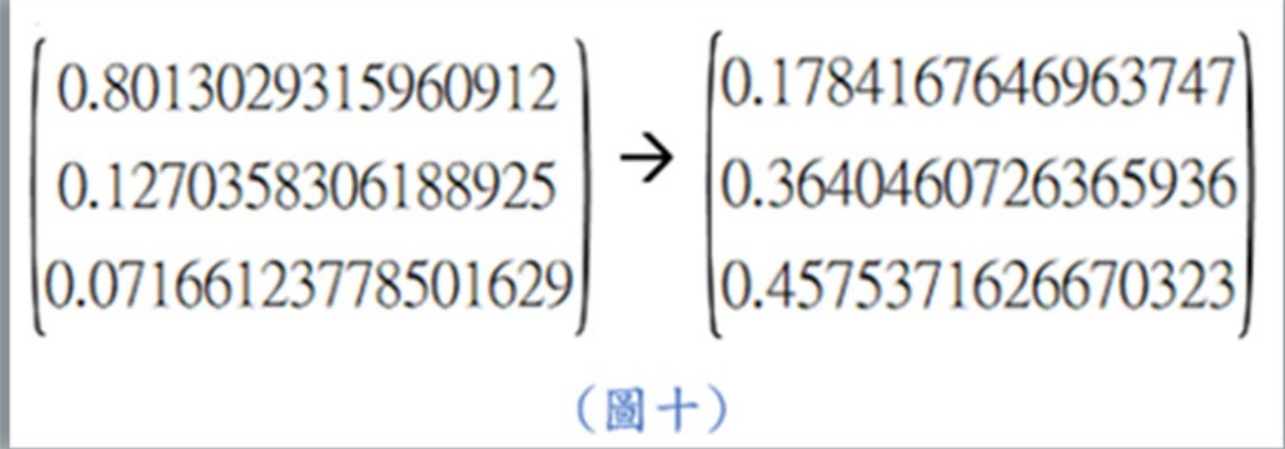
完成這三個步驟後，就可從結果中觀察出資料是否在多年後趨勢可有變化或比較趨於某方面的穩定。

結果

程式結果

我們取全部資料來看利用上述的計算程式步驟得出全年級20年後的趨勢：

(全年級) - 趨於租屋 (圖十)

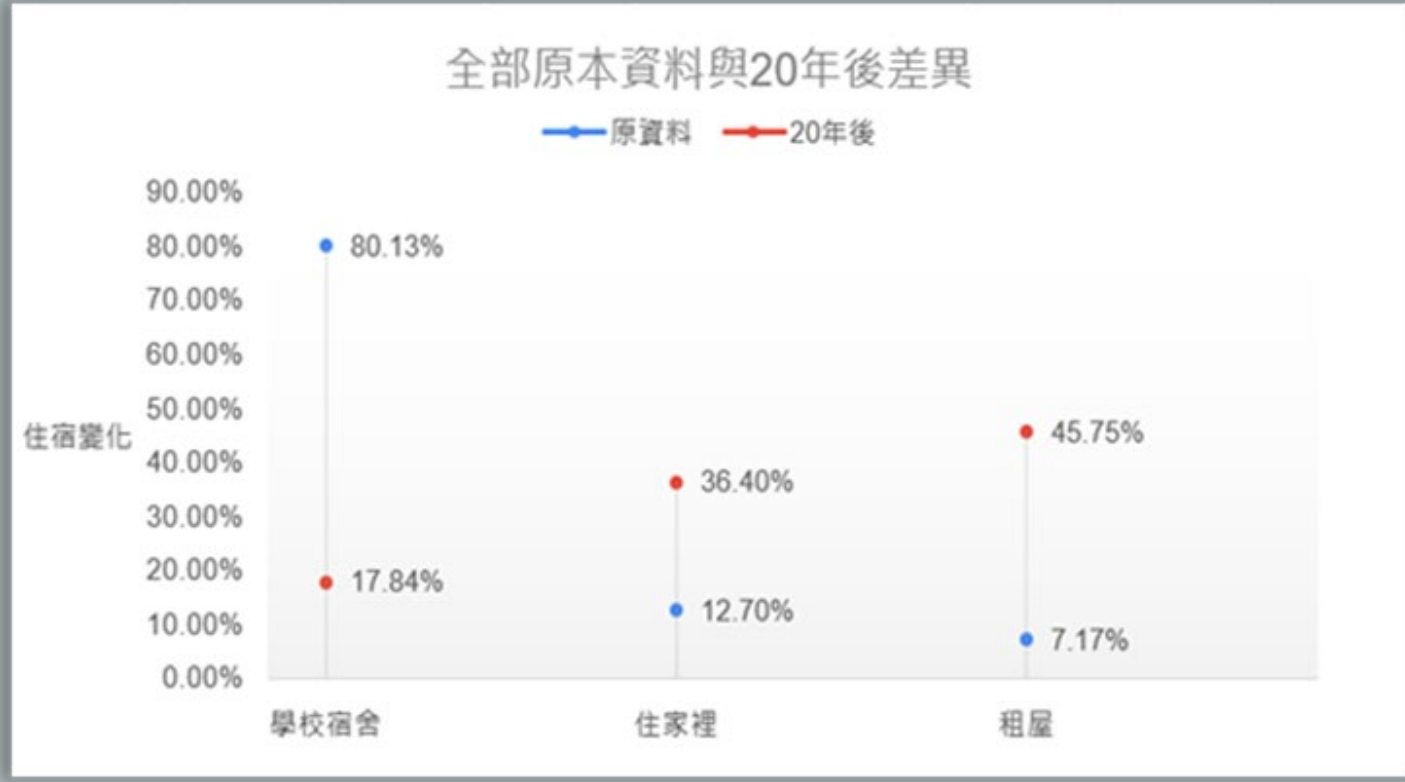


選擇繼續住學校宿舍的趨於0.1784167646963747

選擇住家裡的會趨於0.3640460726365936

選擇租屋的會趨於0.4575371626670323

全部差異		
	原資料	20年後
學校宿舍	80.13%	17.84%
住家裡	12.70%	36.40%
租屋	7.17%	45.75%



*結果說明：

從結果中最終會發現20年後宿舍比率會比較偏向於租屋方向。我們就可利用此數據做為一個參考值，利用得出的數值是否可考慮運用在未來擬定宿舍計畫時有更加實際的數據參考，當然我們所收集的資料對象為大學生，有關大學生在學校住宿情況來說大致不大可能住到20年之久，之所以取20年是想讓大家能夠更加清楚的看出具有明顯性的比例趨勢變化。而在使用上述做法作為預測依據時，切記需符合轉移矩陣的條件。

結論

根據我們所研究的內容加以討論發現，就像我們所說的大學生住宿大致不會住到20年之久，且並不是每個例子都與義守大學的條件完全相符，但我們可以用不同篩選方式來針對不同的例題尋找出最有利的條件進而加以計算，這樣我們所敘述的計算方式以及理論就不單單僅限於我們所提出的例題，還可運用在不同的數據資料當中，比如公司員工宿舍、報社訂報率、各式各樣店鋪商品購買率等...，如果能將其利用在更加大量更加長遠的數據中或許就可看出更加精確的趨勢變化，就此有更好的判斷依據。

參考資料

- [1] <https://ir.nctu.edu.tw/bitstream/11536/50882/1/351902.pdf>
- [2] <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%BD%89%E7%A7%BB%E7%9F%A9%E9%99%A3%E5%AE%9A%E4%B9%89%E5%92%8C%E6%80%A7%E8%B4%A8>
- [3] https://www.sphs.hc.edu.tw/ischool/public/resource_view/open.php?file=0890a851966c39d70d18f76ee58fd04b.pdf
- [4] <http://www2.chsh.chc.edu.tw/bee/I09207/I100530.pdf>
- [5] https://maxima.sourceforge.io/docs/tutorial/cn/maxima_1_cn.pdf